

# LABORATORIUM PROMIENIOWANIE W MEDYCYNIE

Dodatek B

---

ODDZIAŁYWANIE PROMIENIOWANIA GAMMA  
Z MATERIAŁ

---

# 1 Przekrój czynny

W oddziaływaniu promieniowania gamma z materią uczestniczą kwanty promieniowania gamma zwane często fotonami oraz atomami materii. Strumień kwantów promieniowania bombarduje materię, która stanowi rodzaj tarczy. Kwant czyli cząstka promieniowania gamma niesie energię

$$E_\gamma = h\nu_\gamma = h \frac{c}{\lambda_\gamma} \quad (1)$$

gdzie:  $h$  oznacza stałą Plancka,  $\nu$  oznacza częstotliwość promieniowania,  $c$  jest prędkością światła w próżni natomiast  $\lambda_\gamma$  stanowi długość fali promieniowania przypisaną kwantowi. Jeżeli znana jest energia  $E_\gamma$ , wzór (1) pozwala na wyznaczenie długości fali  $\lambda_\gamma$ .

Nuklid promieniotwórczy  ${}^{60}_{27}\text{Co}$  często stosowany w medycynie i technice, emituje kwanty gamma o średniej energii  $E_\gamma = 1.23 \text{ MeV}$ . Stosując wzór (1) otrzymuje się:

$$\lambda_\gamma = \frac{6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2.99 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{1.23 \text{ MeV}} = \frac{6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2.99 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{1.25 \cdot 10^6 \cdot 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \cong 9.9 \cdot 10^{-3} \text{ Å} \quad (2)$$

gdzie  $\text{Å} = 10^{-10} \text{ m} = 10^{-8} \text{ cm}$ . Długość fali  $\lambda$  jest jedynym wymiarem geometrycznym jaki można przypisać kwantowi gamma. Z kolei, promień atomu  $r_A$  można oszacować jako

$$r_A \approx 10^{-8} \text{ cm} \quad (3)$$

i wartość tej odpowiada przekrój atomu

$$S_A = \pi r_A^2 \cong 3 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \quad (4)$$

oraz objętość atomu

$$V = \frac{4}{3} r_A^3 \cong 4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3 \quad (5)$$

Podobne wielkości można oszacować dla jądra atomowego, mianowicie:

$$R_J \cong 1.2 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (6)$$

$$S_J \cong \pi R_J^2 \simeq 3.14 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2 \quad (7)$$

oraz

$$V_J \cong \frac{4}{3} \pi R_J^3 \simeq 3.14 \cdot 10^{-39} \text{ cm}^3 \quad (8)$$

Porównując (3) i (6) można stwierdzić, że promień  $r_A$  jest  $10^5$  razy większy niż promień  $R_J$ . Gdyby przyjąć, że jądro atomowe posiada średnicę 1 m to wtedy średnica atomu wyniesie  $10^5 \text{ m} = 10^2 \text{ km} = 100 \text{ km}$ .

Powyższe rachunki dają obraz o tym jakiej wielkości obiekty uczestniczą w oddziaływaniu promieniowania gamma z materią. Padający kwant promieniowania gamma (pocisk) może się zderzyć lub nie z atomem (tarczą) w kierunku którego podąża. Atom stanowi tarczę której przypisuje się przekrój zwany w fizyce jądrowej *przekrojem czynnym*. Jednostką przekroju czynnego jest barn

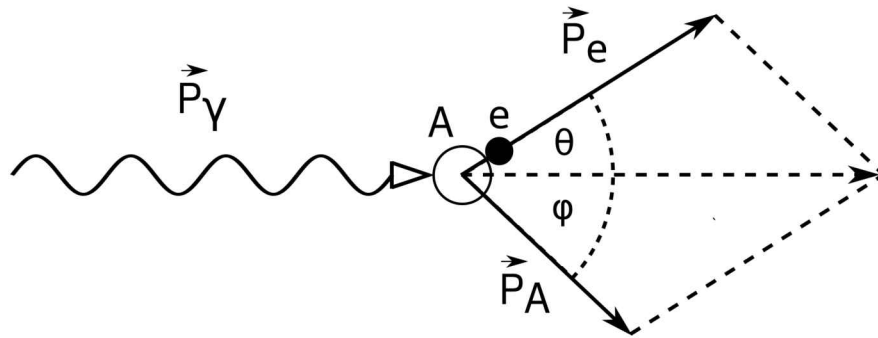
$$1b = 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (9)$$

1 barn (z ang. stodoła) jest ogromną jednostką w porównaniu z przekrojem jądra  $S_J$  (7) i oczywiście jest mniejszy od przekroju geometrycznego atomu  $S_A$  (wzór 4).

Przekroje czynne jakkolwiek posiadające wymiar powierzchni nie są bezpośrednio powiązane ze wspomnianymi powyżej przekrojami geometrycznymi. Przekroje czynne wylicza się stosując głównie metody mechaniki kwantowej jak również wyznacza się je eksperymentalnie. Ponadto występują różne przekroje czynne charakteryzujące różne mechanizmy oddziaływania promieniowania gamma z atomami. Do głównych mechanizmów oddziaływania należą: *efekt fotoelektryczny*, *efekt Comptona*, *zjawisko tworzenia (kreacji) par elektron-pozyton*.

## 2 Efekt fotoelektryczny

Rysunek 1 przedstawia zderzenie kwantu promieniowania gamma z atomem w wyniku którego wybity jest elektron zwany fotoelektronem.



Rysunek 1: Efekt fotoelektryczny czyli proces zderzenia się trzech ciał

Rysunek 1 przedstawia tzw. proces zderzenia trzech ciał. Mianowicie foton  $\gamma$  z pędem  $\vec{p}_\gamma$  zderza się z atomem A z którego z powłoki elektronowej wybije elektron  $e$ , który w trakcie zderzenia uzyskuje pęd  $\vec{p}_e$ . Jednocześnie atom A uzyskuje energię kinetyczną  $E_A$  i pęd  $\vec{p}_A$ . Energia  $E_A$  jest niewielka, ale ponieważ masa atomu  $m_A$  jest duża występuje pęd odbitego atomu  $\vec{p}_A$ , który posiada wartość umożliwiającą spełnienie zasady zachowania pędu w powyższym zderzeniu. Uwolnienie elektronu z powłoki atomowej wymaga co najmniej energii  $W$  dostarczonej przez kwant promieniowania.  $W$  jest energią wiązania elektronu w atomie. W rzeczywistości zasadę zachowania energii dla zderzenia trzech ciał można wstępnie zapisać w postaci:

$$E_\gamma \geq W + E_A \quad (10)$$

Energia  $E_A$  w praktyce jest bliska zeru, zatem nierówność (9) można zapisać:

$$E_\gamma \geq W \quad (11)$$

Dla spełnienia zasady zachowania energii uwolniony fotoelektron uzyskuje energię

$$E_e = E_\gamma - W \quad (12)$$

Wyliczony wzór teoretyczny na przekrój czynny zajścia efektu fotoelektrycznego  $\sigma_{Ph}$  jest dość skomplikowany, jednakże udaje się go przedstawić w skróconej prostej postaci, mianowicie:

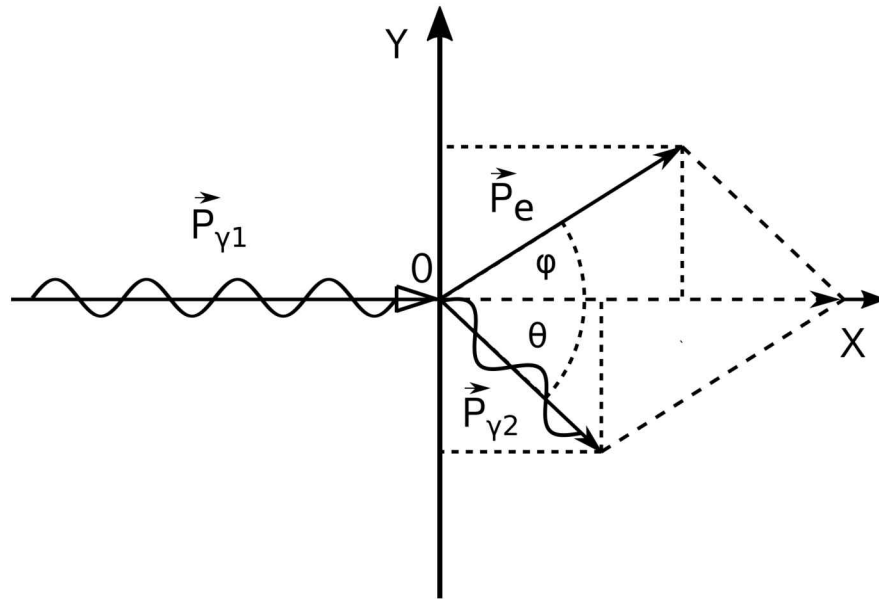
$$\sigma_{Ph} = C \cdot \frac{Z^5}{E_\gamma^{3.5}}, \quad (13)$$

gdzie:  $C$  jest stałą,  $Z$  jest liczbą atomową.

W praktyce dla pierwiastków o niskiej liczbie atomowej  $Z$  (pierwiastki np. występujące w organizmach) przekroje czynne pochodzące z pomiarów eksperymentalnych są proporcjonalne do  $Z^4$ . Dla pierwiastków o dużym  $Z$  występuje  $Z^{4.8}$ .

### 3 Zjawisko (efekt) Comptona

Zjawisko Comptona czyli rozpraszanie nieelastyczne (niesprężyste) kwantów gamma jest ważne w zastosowaniach medycznych promieniowania gamma. Schemat rozpraszania comptonowskiego przedstawia Rys. 2. Padający kwant  $\gamma_1$  promieniowania posiada energię  $E_{\gamma_1}$  oraz pęd  $\vec{p}_{\gamma_1}$ , gdzie



Rysunek 2: Schemat rozproszenia comptonowskiego

stosownie do wzoru (1)

$$E_{\gamma_1} = h\nu_1 = h\frac{c}{\lambda_1} \quad (14)$$

oraz

$$P_{\gamma_1} = \frac{h\nu_1}{c} = \frac{h}{\lambda_1} \quad (15)$$

Natomiast rozproszony kwant  $\gamma_2$  posiada energię i pęd

$$E_{\gamma_2} = h\nu_2 = h\frac{c}{\lambda_2} \quad (16)$$

$$P_{\gamma_2} = \frac{h\nu_2}{c} = \frac{h}{\lambda_2} \quad (17)$$

Prawo zachowania pędu w rozproszeniu pXXX wzdłuż osi X posiada postać:

$$\frac{E_{\gamma_1}}{c} = \frac{E_{\gamma_2}}{c} \cos \theta + p_e \cos \varphi \quad (18)$$

a wzdłuż osi Y:

$$0 = -\frac{E_{\gamma 2}}{c} \sin \theta + p_e \sin \varphi \quad (19)$$

Po szeregu standardowych przekształceń z uwzględnieniem zasady zachowania energii otrzymuje się:

$$E_{\gamma 2} = \frac{E_{\gamma 1}}{1 + q(1 - \cos \theta)}, \quad (20)$$

gdzie

$$q = \frac{E_{\gamma 1}}{m_e c^2} \quad (21)$$

jest energią padającego kwantu gamma wyrażoną w jednostkach tzw. energii spoczynkowej elektronu

$$E_{es} = m_e c^2, \quad (22)$$

gdzie  $m_e$  jest masą spoczynkową elektronu.

Energia  $E_{\gamma 2}$  rozproszonego kwantu gamma zależy od kąta  $\theta$  rozpraszania i ogólnie jest mniejsza od energii  $E_{\gamma 1}$  kwantu padającego. Ze wzoru (20) otrzymuje się wyrażenie na tzw. *przesunięcie comptonowskie*

$$\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_c (1 - \cos \theta), \quad (23)$$

gdzie:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} \quad (24)$$

nosi nazwę *długości fali Comptona* i wynosi  $\lambda_C = 0.0243 \text{ \AA}$ .

We wzorze (23)  $\lambda_2$  jest długością fali kwantu rozproszonego  $\gamma_2$  który posiada energię  $E_{\gamma 2}$ ,  $\lambda_1$  jest długością fali kwantu padającego  $\gamma_1$  o energii  $E_{\gamma 1}$ . Ponieważ

$$E_{\gamma 1} > E_{\gamma 2} \quad (25)$$

zatem mając na uwadze wzór (1)

$$\lambda_2 > \lambda_1 \quad (26)$$

Warto rozpatrzyć szczególne przypadki rozproszenia comptonowskiego. Rozproszenie na wprost,  $\theta = 0$ , wtedy stosownie do wzoru (20)

$$E_{\gamma 2} = E_{\gamma 1} \quad (27)$$

Kwant rozproszony posiada taką samą energię jak kwant padający. Rozproszenie wtórne, gdy  $\theta = \pi$ , wtedy stosownie do wzoru (20)

$$E_{\gamma 2} = \frac{E_{\gamma 1}}{1 + 2q} \quad (28)$$

Jeśli  $E_{\gamma 2} \rightarrow \infty$  (przyjmuje duże wartości) wtedy

$$E_{\gamma 2} = \frac{E_{\gamma 1}}{E_{\gamma 1} \left(1 + \frac{\lambda}{m_e c^2}\right)} \rightarrow \frac{m_e c^2}{2} \quad (29)$$

i  $E_{\gamma 2}$  wynosi 255 keV.

Stosownie do wzoru (20) można wyliczyć energię  $E_{\gamma 2}$  kwantu  $\gamma_2$  rozproszonego pod dowolnym kątem  $\theta$ .

## 4 Przekrój czynny na zjawisko Comptona

Przekrój czynny  $\sigma_c$  na wystąpienie efektu Comptona podany jest przez skomplikowany wzór Kleina-Nishiny, gdzie występuje zależność tego przekroju od energii  $E_{\gamma 1}$  padającego kwantu  $\gamma_1$ . Ponadto przekrój  $\sigma_c$  jest proporcjonalny do liczby atomowej  $Z$  pierwiastka z którego składa się bombardowana materia.

Wzór Kleina-Nishiny posiada postać:

$$\sigma_c(E_{\gamma 1}) = \Pi Z r_e^2 p \left[ (1 - 2p - 2p^2) \ln\left(1 + \frac{2}{p}\right) + \frac{2(1 + 9p + 8p^2 + 2p^3)}{(p + 2)^2} \right] \quad (30)$$

gdzie:

$$p = \frac{m_e c^2}{E_{\gamma 1}} \quad (31)$$

oraz

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \quad (32)$$

jest stałą  $r_e \cong 2.82 \cdot 10^{-13} \text{cm}$  a  $\epsilon_0$  jest przenikalnością dielektryczną próżni. Przekrój  $\sigma_c(E_{\gamma 1})$  zarówno się wylicza teoretycznie jak i mierzy się doświadczalnie.

## 5 Tworzenie par elektron- pozyton

Energia spoczynkowa zarówno elektronu jak i pozytonu wynosi:

$$E_{\bar{e}} = E_{e^+} = m_e c^2 \quad (33)$$

Jeśli energia kwantu  $E_\gamma$  przebiegającego w pobliżu jądra atomu jest większa lub równa podwójnej energii spoczynkowej, czyli jeśli

$$E_\gamma \geq 2m_e c^2 = 2 \cdot 0,511 \text{MeV} = 1,022 \text{MeV} \quad (34)$$

to wtedy wystąpi reakcja pary elektron-pozyton. Bliskość jądra atomowego jest konieczna by w procesie reakcji mogła być spełniona zasada zachowania pędu. W wyniku procesu reakcji zanika kwant promieniowania  $\gamma$  a w jego miejsce pojawia się ujemny elektron i dodatni pozyton. Minimalna energia kwantu gamma potrzebna do reakcji pary wynosi  $E_\gamma = 2m_e c^2$  Nadmiar energii wynoszący w ogólnym przypadku

$$\Delta E = E_\gamma - 2m_e c^2 \quad (35)$$

występuje w postaci energii kinetycznej pozostałych cząstek. Energia kinetyczna rozdzielona pomiędzy cząstki niekoniecznie musi być rozdzielona po równo. W ogólności  $E_{e^+}$  może przyjmować wartości od zera do  $E_{e^+} = E_\gamma - 2m_e c^2$ .

Wtedy

$$E_{e^-} = E_\gamma - 2m_e c^2 - E_{e^+} \quad (36)$$

Średnia energia przypadająca na cząstkę wynosi oczywiście

$$E_{\text{sr}} = \frac{E_\gamma - 2m_e c^2}{2} \quad (37)$$

Jak w poprzednich przypadkach, również i przy kreacji par elektron-pozyton wzór opisujący przekrój czynny par elektron-pozyton wzór opisujący przekrój czynny  $\sigma_{pp}$  jest dość skomplikowany. Przekrój ten jest proporcjonalny do kwadratu liczby atomowej

$$\sigma_{pp} \sim Z^2 \quad (38)$$

bombardowanej materii.

## 6 Liczba Avogadro

Liczba Avogadro  $N_{AV} \approx 6,022 \cdot 10^{23}$  jest stałą która odpowiada liczbie atomów przypadającej na mol substancji. Biorąc pod uwagę symbole pierwiastka  ${}_Z^AX$  gdzie  $A$  jest liczbą masową pierwiastka  $X$ ,  $Z$  jest liczbą atomową, można podać, że

- dla  ${}_{6}^{12}\text{C}$ , czyli dla 12g węgla występuje  $N_{AV}$  atomów,
- dla  ${}_{8}^{14}\text{O}$ , czyli dla 14g tlenu występuje  $N_{AV}$  atomów,
- dla  ${}_{7}^{15}\text{N}$ , czyli dla 15g azotu występuje  $N_{AV}$  atomów, itp.

Dla masy  $m[\text{g}]$  wybranego pierwiastka można napisać proporcję

$$\frac{N}{N_{AV}} = \frac{m}{A} \quad (39)$$

gdzie  $N$  atomów odpowiada masie  $m$  gramów, a  $N_{AV}$  atomów odpowiada masie  $A$  gramów. Po podzieleniu obustronnie przez  $\text{cm}^3$  otrzymuje się:

$$\frac{N \frac{\text{atomów}}{\text{cm}^3}}{N_{AV}} = \frac{\frac{m}{\text{cm}^3}}{A} \quad (40)$$

czyli

$$\frac{N \frac{\text{atomów}}{\text{cm}^3}}{N_{AV}} = \frac{\rho}{A} \quad (41)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością pierwiastka.

Po przekształceniu otrzymuje się wzór na  $N$  czyli:

$$N\left(\frac{\text{atom}}{\text{cm}^3}\right) = \frac{\rho}{A} N_{AV} \quad (42)$$

na gęstość atomów bombardowanej tarczy.

## 7 Przekrój czynny a współczynnik osłabienia

Makroskopowy współczynnik osłabienia promieniowania gamma jest proporcjonalny do mikroskopowego przekroju czynnego  $\sigma$ :

$$\mu = \sigma \cdot N = \sigma \frac{\rho}{A} \cdot N_{AV} \quad (43)$$

Biorąc pod uwagę poszczególne mechanizmy oddziaływania promieniowania gamma z materia można zapisać

$$\mu(E) = N[\sigma_{ph}(E) + \sigma_c(E) + \sigma_{pp}(E)] \quad (44)$$

i następnie

$$\mu(E) = \mu_{ph} + \mu_c + \mu_{pp} \quad (45)$$

Używaną jednostką dla współczynników  $\mu$  jest  $cm^{-1}$

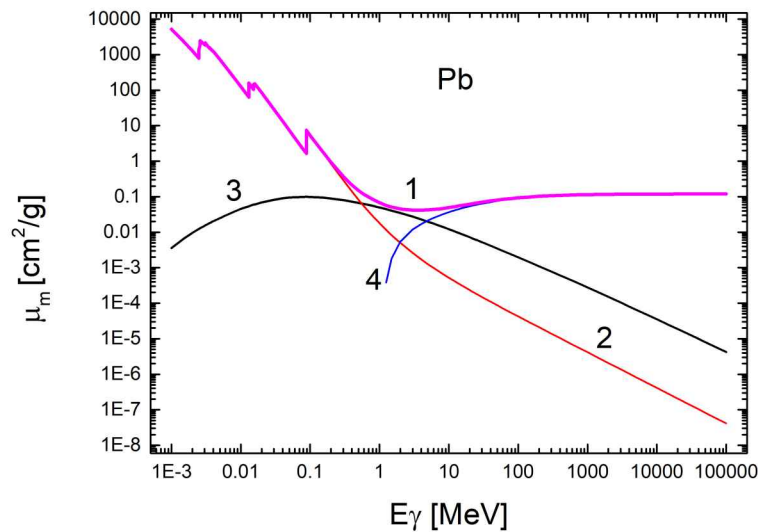
W powyższym wzorze  $\mu_{ph}$  stanowi współczynnik osłabienia promieniowania gamma w wyniku efektu fotoelektrycznego,  $\mu_c$  w wyniku efektu Comptona a  $\mu_{pp}$  w wyniku kreacji par pozyton elektron.

W praktyce medycznej, nuklearnej i technicznej bardzo użyteczny jest masowy współczynnik osłabienia, czyli

$$\mu_m(E) = \frac{\mu(E)}{\rho} = [\mu_{mph}(E) + \mu_{mc}(E) + \mu_{mpp}(E)] \quad (46)$$

Jednostką  $\mu_m$  jest  $\frac{cm^2}{g}$ .

Rysunek 3 przedstawia składowe współczynniki masowe osłabienia oraz wypadkowy współczynnik masowy osłabienia. Ołów jest materiałem używanym na osłony przed promieniowaniem



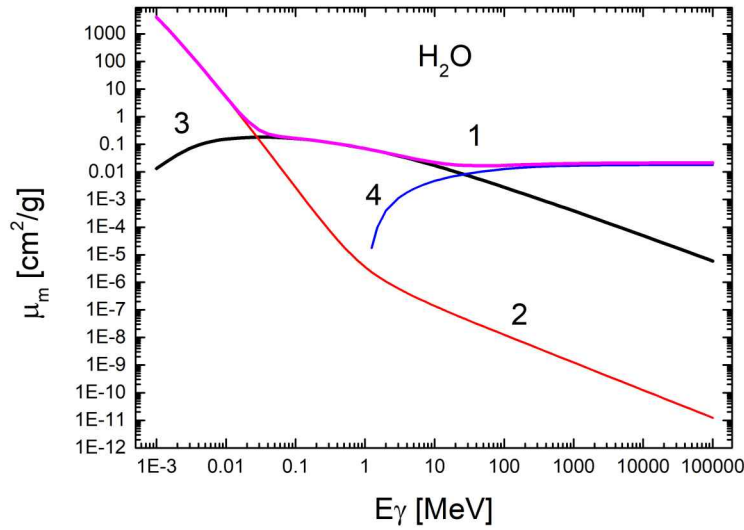
Rysunek 3: Masowe współczynniki osłabienia jako funkcje energii  $E_\gamma$  padających kwantów promieniowania; krzywe 1 –  $\mu_m$ , 2 –  $\mu_{mph}$ , 3 –  $\mu_{mc}$ , 4 –  $\mu_{mpp}$

gamma. Rys. 4 przedstawia masowe współczynniki dla wody; 1 –  $\mu_m$ , 2 –  $\mu_{mph}$ , 3 –  $\mu_{mc}$ , 4 –  $\mu_{mpp}$ . Warto zaznaczyć, że masowe współczynniki osłabienia występujące dla wody są podobne do tych charakteryzujących organizmy.

Zarówno wykres 3 jak i 4 prezentowane są przy użyciu obu skal logarytmicznych.

Współczynnik masowy osłabienia promieniowania gamma  $\mu_{mph}$  powodowany przez efekt fotoelektryczny (Rys.3) przedstawiony przy pomocy krzywej 2 maleje gdy energia padających kwantów  $E_\gamma$  rośnie. W obszarze energii  $E_\gamma$  od  $10^{-3}$  MeV do 0,6 MeV krzywa 2 pokrywa się z krzywą





Rysunek 4: Zależność masowych współczynników osłabienia promieniowania gamma od energii  $E_\gamma$  padających kwantów; krzywe dla  $H_2O$  1 –  $\mu_m$ , 2 –  $\mu_{mph}$ , 3 –  $\mu_{mc}$ , 4 –  $\mu_{mpp}$ .

wypadkową 1 dla całkowitego  $\mu_m$ . Skoki na krzywej związane są z rozpoczynaniem efektu fotoelektrycznego z kolejnej nowej głębiej leżącej powłoki elektronowej atomu gdy energia kwantu rośnie. Dla energii  $E_\gamma$  powyżej 0,6 MeV współczynnik  $\mu_{mph}$  zmierza do coraz to mniejszych wartości gdy energia  $E_\gamma$  rośnie. Współczynnik masowy  $\mu_{mc}$  wpierw łagodnie narasta, osiąga płaskie maksimum, a następnie łagodnie maleje (krzywe 3). Dla energii poniżej progu kreacji par elektron-pozyton, czyli poniżej  $E_\gamma = 1,022 \text{ MeV}$ , krzywa 4 nie istnieje. Powyżej tego progu krzywa 4, czyli  $\mu_{mpp}(E_\gamma)$  narasta i zaczyna dominować gdy energia padających kwantów gamma zwiększa się. Powyżej 5 MeV staje się głównym składnikiem krzywej wypadkowej  $\mu_m(E_\gamma)$  oznaczonej liczbą 1. Mając na uwadze wzory (??) i (??) i (??) należy podkreślić że krzywe  $\sigma_m(E_\gamma)$ ,  $\sigma_{mph}(E_\gamma)$ ,  $\sigma_{mc}(E_\gamma)$  oraz  $\sigma_{mpp}(E_\gamma)$  przebiegają analogicznie do tych przedstawionych na rysunku 2. Analogicznie wnioski można podać również dla zależności przedstawionych na rysunku 4 dla wody.