LABORATORIUM
PROMIENIOWANIE W MEDYCYNIE

Dodatek A

ABSORPCJA PROMIENIOWANIA GAMMA PRZEZ MATERIĘ

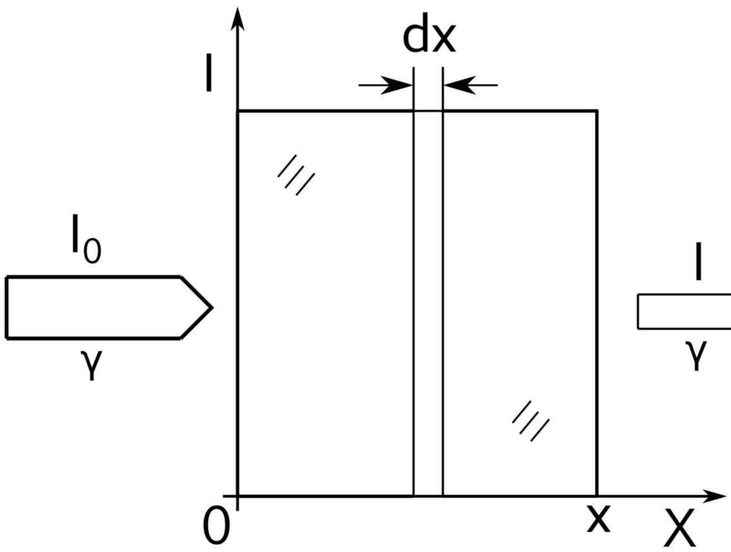
---

1 Prawo absorpcji

Prawdopodobieństwo, że pojedyncza cząstka γ przebiegająca drogę o jednostkowej długości dozna oddziaływania z materią wynosi μ. Zatem na drodze dx prawdopodobieństwo oddziaływania kwantu gamma z materią wyniesie μdx. Natężenie promieniowania I jest liczbą kwantów gamma N przebiegających przez jednostkową powierzchnię w jednostce czasu. Schematyczny Rys. 1 przedstawia absorpcję promieniowania gamma w materii. Każda cienka warstwa dx osłabia natężenie promieniowanie o dI:

$$dI = -\mu I dx, \tag{1}$$

gdzie wspomniane już μ nosi nazwę liniowego współczynnika absorpcji albo też linowego współczynnika osłabiania.



Rysunek 1: Absorpcja promieniowania gamma w materii.

Na podstawie (1) otrzymuje się równanie różniczkowe

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx. \tag{2}$$

Na drodze przebiegu kwantu gamma (Rys. 1) od $x = 0$ do x natężenie wiązki promieniowania spada od I_0 do $I(x)$, co uwzględnia się dokonując całkowania

$$\int_{I_0}^{I(x)} \frac{dI}{I} = -\int_{z=0}^{x} \mu dz \tag{3}$$

$$\ln |_{I_0}^{I(x)} = -\mu z|_0^x \tag{4}$$

$$\ln I(x) - \ln I_0 = -\mu x \tag{5}$$

$$\ln \frac{I(x)}{I_0} = -\mu x \tag{6}$$

$$\frac{I(x)}{I_0} = e^{-\mu x} \tag{7}$$

Zatem otrzymuje się prawo absorpcji (osłabiania) promieniowania γ przez materię w postaci

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x}. \tag{8}$$

Prawo to jest nazywane eksponencjalnym prawem osłabiania. Linowy współczynnik absorpcji μ podawany jest w jednostkach cm^{-1}. Wartość współczynnika μ zależy od dwu czynników: rodzaju materii absorbującej promieniowanie oraz od energii kwantów padającego promieniowania ($E_\gamma = k\nu$; h - stała Plancka, ν - częstotliwość promieniowania). Wartości współczynnika μ są stablicowane dla różnych materiałów i dla różnych energii padających kwantów promieniowania. Przykładowe linowe współczynniki absorpcji promieniowania podaje Tabela 1.

Tabela 1: Liniowe współczynnik absorpcji promieniowania gamma μ (cm^{-1} dla wybranych materiałów)

E_γ [MeV]	ołów	żelazo	miedź	aluminium	beton	woda
0,662	1,22	0,576	0,642	0,202	0,172	0,0888
1,25	0,66	0,42	0,466	0,149	0,127	0,0632

E_γ = 0,662 MeV odpowiada kwantom gamma emitowanym przez nuklid ${}^{137}_{55}\text{Cs}$. E_γ = 1,25 MeV odpowiada kwantom gamma emitowanym przez nuklid ${}^{60}_{27}\text{Co}$. Warto zaznaczyć, że współczynniki μ tkanek organizmu są porównywalne ze współczynnikiem charakteryzującym wodę.

2 Cienki absorbent

Dla cienkich warstw materii absorbujących promieniowanie gamma stosownie do równania (8) można wprowadzić rozwinięcie w szereg

$$\frac{I(x)}{I_0} = e^{-\mu x} = 1 - \mu x + \frac{(\mu x)^2}{2!} - \frac{(\mu x)^3}{3!} + \cdots \tag{9}$$

W praktyce wystarczające przybliżenie przyjmuje postać

$$I(x) = I_0(1 - \mu x) \tag{10}$$

3 Masowy współczynnik absorpcji

Eksponencjalne prawo absorpcji można zapisać w postaci:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\cdot \rho x}, \tag{11}$$

gdzie ρ jest gęstością materii, natomiast

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho} \tag{12}$$

jest masowym współczynnikiem absorpcji, lub też masowym współczynnikiem osłabiania. Jednostką μ_m jest $\text{cm}^{-1}/(\text{g/cm}^3) = \text{cm}^2/\text{g}$. Należy podkreślić, że masowy współczynnik absorpcji pełni ważną rolę w diagnostyce i terapii medycznej.

4 Grubość połówkowa

Rozpatruje się sytuację gdy natężenie I_0 po przejściu promieniowania przez warstwę materii o grubości $x_{1/2}$ spada do wartości $I_0/2$, czyli gdy $I(x_{1/2}) = \frac{I_0}{2}$. Zatem

$$\frac{\frac{I_0}{2}}{I_0} = e^{-\mu x_{1/2}} \tag{13}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\mu x_{1/2}} \tag{14}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -\mu x_{1/2} \tag{15}$$

$$\ln 2 = \mu x_{1/2} \tag{16}$$

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} \tag{17}$$

Wzór (17) podaje grubość połówkową materii. Biorąc pod uwagę wartości μ z Tabeli 1, można podać stosując wzór (17) wartość $x_{1/2}$ dla wybranych materiałów, co przedstawia Tabela 2.

Tabela 2: Liniowe współczynnik absorpcji promieniowania gamma μ (cm^{-1} dla wybranych materiałów)

E_γ [MeV]	ołów	żelazo	miedź	aluminium	beton	woda
0,662	0,57	1,203	1,079	3,431	4,029	7,806
1,25	1,05	1,650	1,487	4,652	5,459	10,968

Z Tabeli 2 widać, że grubości połówkowe zależą od energii charakteryzującej padające na materię absorbującą kwanty gamma. Ponadto dla różnych materiałów wartość $x_{1/2}$ potrafią być bardzo różne. I tak np. dla energii E_γ = 1,25 MeV $x_{1/2}(H_2O)$ jest ok. 11 razy większa od grubości $x_{1/2}$(Pb) dla ołowiu. Oznacza to, że grubość warstwy wody musi być większa od grubości warstwy ołowiu ok. 11 razy by doprowadzić do takiej samej absorpcji. Dlatego, ze względów praktycznych używa się osłony ołowiane przed promieniowaniem gamma.

5 Wielokrotność grubości połówkowej

Warto rozpatrzyć przypadek, gdy grubość absorbującej warstwy materii jest wielokrotnością grubości połówkowej, czyli $x = nx_{1/2}$, wtedy wzór (8) można przepisać w postaci

$$\frac{I(x)}{I_0} = \frac{I\left(nx_{1/2}\right)}{I_0} = e^{-\mu n x_{1/2}} \tag{18}$$

czyli

$$\frac{I\left(nx_{1/2}\right)}{I_0} = \left(e^{-\mu x_{1/2}}\right)^n \tag{19}$$

wstawiając za $x_{1/2}$

$$\frac{I\left(nx_{1/2}\right)}{I_0} = \left(e^{-\mu\frac{\ln 2}{\mu}}\right)^n \tag{20}$$

zatem

$$\frac{I\left(nx_{1/2}\right)}{I_0} = \left(e^{-\ln 2}\right)^n. \tag{21}$$

Następnie

$$\frac{I\left(nx_{1/2}\right)}{I_0} = \left(e^{\ln\frac{1}{2}}\right)^n. \tag{22}$$

Kolejno

$$I\left(nx_{1/2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\dots\cdot\frac{1}{2}}_{\text{n razy}} \tag{23}$$

Każde następne $x_{1/2}$ redukuje o połowę poprzednie natężenie I! Zatem:

$$I(x_{1/2}) = \frac{1}{2}I_0 = 50\% I_0 \tag{24}$$

$$I(2x_{1/2}) = \frac{1}{4}I_0 = 25\% I_0 \tag{25}$$

$$I(3x_{1/2}) = \frac{1}{8}I_0 = 12,5\% I_0 \tag{26}$$

$$I(5x_{1/2}) = \frac{1}{16}I_0 = 6,25\% I_0 \tag{27}$$

$$I(6x_{1/2}) = \frac{1}{32}I_0 = 3,1\% I_0 \tag{28}$$

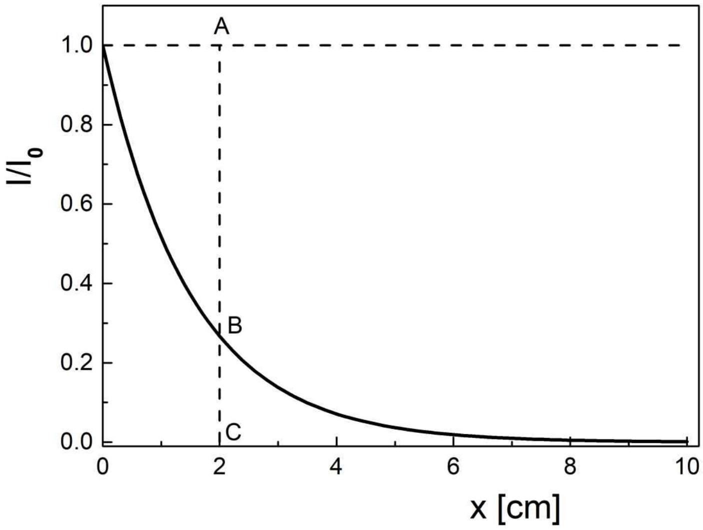
Z powyższego zestawienia widać jak bardzo kolejne grubości połówkowe warstwy redukują natężenie promieniowania gamma padającego na warstwę materii (na warstwę osłony przed promieniowaniem).

6 Średnia droga swobodna

Średnia droga swobodna znana jest z kinetycznej teorii gazów, jest to taka droga po przebyciu której cząsteczka zderza się z inną cząsteczką gazu. W przypadku kwantów gamma jest to taka średnia droga przebywana przez kwant w materii po której nastąpi oddziaływanie (zderzenie) kwantu z materią. W celu określenia liczbowego dla średniej drogi swobodniej kwantu gamma pomocny może być Rys. 2

Wykres przedstawia zależność dla ołowiu

$$\frac{I(x)}{I_0} = e^{-0{,}66\ \text{cm}^{-1}\cdot x\ \text{cm}} \tag{29}$$



Rysunek 2: Przykładowa zalżność absorpcji promieniowania gamma o energii kwantów E$_\gamma$=1,25 MeV od grubości warstwy absorbującej Pb.

Dla dowolnego x, w tym przypadku dla x=2 cm wstawiono prostą równoległą do osi współrzędnych I. Prosta ta wyznacza punkty przecięcia A, B i C. Odcinek AB przedstawia prawdopodobieństwo P$_1$, że kwant gamma oddziałał z materią, został wyeliminowany z dalszego biegu, a $\frac{I(x{=}2\ \mathrm{cm})}{I_0}$ zmalało. Prawdopodobieństwo takie wyniesie:

$$P_1 = 1 - \frac{I(x)}{I_0} = 1 - e^{-\mu x} \tag{30}$$

Prawdopodobieństwo P$_2$, ze kwant nie oddziałał z materią wynosi

$$P_2 = 1 - P_1 = \frac{I(x)}{I_0} = e^{-\mu x} \tag{31}$$

Można wyliczyć prawdopodobieństwo nie oddziałania przypadające na jednostkę długości drogi kwantu w absorbencie, mianowicie

$$P(x) = \left|\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}x}\right| = \left|-\mu e^{-\mu x}\right| \tag{32}$$

Powstaje pytanie, ile wyniesie całka z tego prawdopodobieństwa, a mianowicie ile wyniesie droga $\overline{x}$ mierzona tym prawdopodobieństwem, czyli

$$\overline{x} = \mu \int_0^{-\infty} e^{-\mu x} x \mathrm{d}x \tag{33}$$

Całkując prawą część i wprowadzając granicę całkowania otrzymuje się

$$\int_0^{-\infty} e^{-\mu x} x \mathrm{d}x = \frac{1}{\mu^2} \tag{34}$$

stąd

$$\overline{x} = \mu \cdot \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu} \tag{35}$$

$\overline{x}$ jest średnią drogą swobodną czyli taką po której nastąpi oddziaływanie kwantu gamma z materią.

Warto wyliczyć absorpcję promieniowania gamma dla $x = \overline{x}$, mianowicie

$$\frac{I\left(\frac{1}{\mu}\right)}{I_0} = e^{-\mu \cdot \frac{1}{\mu}} = e^{-1} = 0,3678 \tag{36}$$

Czyli $I\left(\frac{1}{\mu}\right) \cong I_0 \cdot 37\%$
Podobnie

$$I\left(\frac{2}{\mu}\right) \cong 14\% I_0 \tag{37}$$

$$I\left(\frac{3}{\mu}\right) \cong 5\% I_0 \tag{38}$$

Dla dowolnej wielokrotności średniej drogi swobodnej

$$x = n\overline{x} = \frac{n}{\mu} \tag{39}$$

otrzymujemy wyrażenie

$$I\left(\frac{n}{\mu}\right) = I_0 \cdot e^{-n} \tag{40}$$

Warto zwrócić uwagę, że prawa strona wzoru gubi informację materiałową dotyczącą absorbenta. Należy zatem pamiętać o towarzyszącym ważnym wzorze (39). Pozostaje jeszcze wypisać zależność, mając na uwadze wzory (17) i (35), że:

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \ln 2 \cdot \overline{x} \cong 0,693 \cdot \overline{x} \tag{41}$$

Zatem grubość połówkowa jest mniejsza od średniej drogi swobodnej.

Przedstawiony przegląd zagadnienia absorpcji promieniowania gamma przez materię odnosi się do literatury przedstawionej w poniższej spisie.

Literatura

1. B. Dziunikowski, S.J. Kalita, *Ćwiczenia laboratoryjne z jądrowych metod pomiarowych*, Wydawnictwo AGH, Kraków 1995.

2. B. Dziunikowski, *O fizyce i energii jądrowej*, AGH Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Kraków 2001.

3. J. Kenneth Shyltis, R.E. Faho, *Fundamentals of Nuclear Science and Engineering*, CRC Press, Bace Raston 2017.

4. P. Andreo, D.T. Burns, A.E. Nahum, J. Seuntjens, F.H. Attix, *Fundamentals of Ionizing Radiation Dosimetry*, Wiley, Winheim 2017.

5. D.L. Bailey, J.L. Humm, A. Todd-Pokropek, A. van Aswegen, *Nuclear Medicine Physics, A Handbook for Teachers and Students*, IAEA, Vienna 2014.