

# Żyroskop 3-osiowy

## Wymagania do ćwiczenia

---

1. Dynamika ruchu postępowego i obrotowego bryły sztywnej, moment bezwładności.
2. Żyroskop.
3. Zjawisko precesji i nutacji.

## Literatura

---

1. David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, Podstawy Fizyki Tom 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2015.
2. OpenStax, Fizyka dla szkół wyższych, Tom 1, Rozdział 11: [Moment pędu](#).

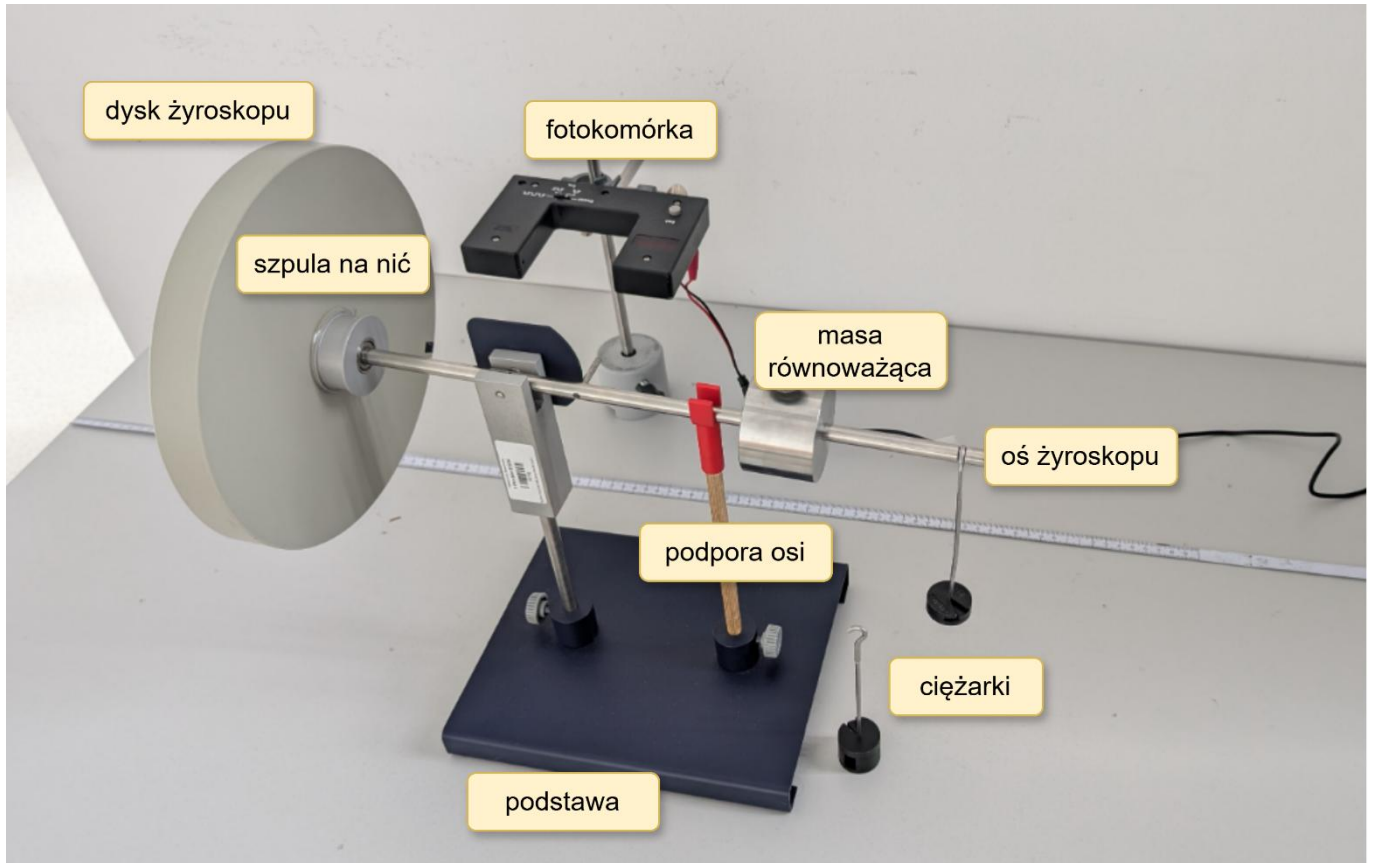
## Przykładowe pytania

---

1. Sformułuj I i II zasadę ruchu postępowego i ją wyjaśnij.
2. Sformułuj I i II zasadę ruchu obrotowego i ją wyjaśnij.
3. Wyjaśnij pojęcie bryły sztywnej.
4. Pokaż analogie pomiędzy wielkościami opisującymi ruch obrotowy i postępowy.
5. Co to jest moment pędu?
6. Podaj zasadę zachowania momentu pędu i wyjaśnij jej znaczenie dla działania żyroskopu.
7. Czym jest żyroskop.
8. Co to jest precesja.
9. Co to jest nutacja.
10. Jak zmiana prędkości kątowej dysku żyroskopu wpływa na częstość precesji?
11. Jak zmiana masy lub jej odległości od punktu podparcia wpływa na częstość precesji?

## Przyrządy pomiarowe / stanowisko pomiarowe

Linijka, suwmiarka, stoper, żyroskop 3-osiowy, fotokomórka



# WPROWADZENIE DO TEMATYKI ĆWICZENIA

Zasada działania żyroskopu opiera się na zasadach dynamiki ruchu obrotowego bryły sztywnej. Bryła sztywna to koncept idealnego ciała fizycznego, w którym odległości pomiędzy dowolnymi dwoma punktami nie zmieniają się niezależnie od działających sił. Ruch obrotowy bryły sztywnej wokół ustalonej osi opisuje się poprzez położenie kątowe  $\varphi$ , prędkość kątową  $\omega = d\varphi/dt$  i przyspieszenie kątowe  $\alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$ . Analizując parametry ruchu obrotowego można dostrzec pewne analogie z ruchem postępowym. Odpowiednikiem masy w ruchu postępowym jest moment bezwładności  $I$  w ruchu obrotowym. Jego wartość zależy od masy bryły i od rozkładu tej masy względem osi obrotu, dodatkowo jest on miarą oporu bryły przeciwko zmianom w ruchu obrotowym. Należy jednak zaznaczyć, że poniższe rozważania dotyczą przypadku, w którym oś obrotu jest nieruchoma względem układu odniesienia — tylko w takim przypadku można ograniczyć się do skalarnie definiowanego momentu bezwładności. W ogólnym przypadku, gdy oś obrotu może się zmieniać, konieczne jest wprowadzenie tensora bezwładności. Dla układu punktów materialnych moment bezwładności definiowany jest zgodnie z poniższym wzorem:

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (1)$$

Natomiast dla ciągłego rozkładu masy znak sumy należy zastąpić całkowaniem:

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV. \quad (2)$$

Dla jednorodnego dysku o masie  $m$  i promieniu  $R$ , który obraca się wokół osi prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez środek moment bezwładności wynosi

$$I = \frac{1}{2} m R^2. \quad (3)$$

Moment bezwładności dysku żyroskopu można również wyznaczyć doświadczalnie na podstawie analizy ruchu obrotowego wywołanego przez spadający ciężarek połączony nicią z dyskiem. Układ taki przedstawiono na Rys. 1, a przyspieszenie kątowe dla niego można wyrazić następującą relacją:

$$\frac{d\omega_R}{dt} = \alpha = \frac{M}{I_P} \quad (4)$$

gdzie  $\omega_R$  - prędkość kątowa,  $\alpha$  - przyspieszenie kątowe,  $I_P$  - moment bezwładności,  $M$  moment siły. W ogólnym ujęciu moment siły w ruchu obrotowym jest wektorem i odpowiednikiem siły w ruchu postępowym. Tak jak siła jest miarą zdolności wywołania zmian w ruchu postępowym, tak moment siły jest miarą zdolności do wywołania zmian w ruchu obrotowym wokół osi obrotu. Definiuje się go jako iloczyn wektorowy wektora ramienia  $\vec{r}$ , na którym działa siła  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (5)$$

W przypadku, gdy wektor  $\vec{r}$  jest prostopadły do siły  $\vec{F}$  (co ma miejsce w rozważanym układzie) to moment siły możemy uprościć do postaci skalarnej:  $M = r \cdot F$ . Dla przypadku, w którym obrót zachodzi wokół ustalonej osi, istotna jest składowa momentu siły równoległa do tej osi. Zgodnie z drugą zasadą

dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego wypadkowy moment sił działających na bryłę jest równy iloczynowi jej momentu bezwładności i przyspieszenia kąowego:  $M = I \cdot \alpha$ , co jest analogiczne dla ruchu postępowego ( $F = m \cdot a$ ).

Ważną wielkością opisującą ruch obrotowy jest również moment pędu  $L$ . Dla pojedynczej cząstki moment pędu względem punktu definiujemy jako

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (6)$$

Dla bryły sztywnej, która obraca się wokół ustalonej osi z prędkością kątową  $\omega$  moment pędu jest wyrażony wzorem

$$L = I\omega, \quad (7)$$

Natomiast dla przypadku ogólnego, gdy oś obrotu nie jest ustalona, lub bryła wykonuje złożone ruchy, moment pędu jest wektorem. Co więcej druga zasada dynamiki ruchu obrotowego bryły sztywnej może zostać również wyrażona za pomocą momentu pędu w następujący sposób:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (8)$$

Jest to matematyczny zapis zasady zachowania pędu, która mówi nam, że jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ jest równy zero, to całkowity moment pędu układu pozostaje stały.

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki siła, która wywołuje moment siły dana jest wzorem:

$$F = m \cdot (g - a) \quad (9)$$

gdzie  $g$  - przyspieszenie ziemskie,  $a$  - przyspieszenie masy  $m$ . Przyspieszenie  $a$  oraz przyspieszenie kątowe  $\alpha$  możemy wyrazić za pomocą następujących wzorów:

$$a = \frac{2h}{t_F^2}; \quad \alpha = \frac{a}{r}, \quad (10)$$

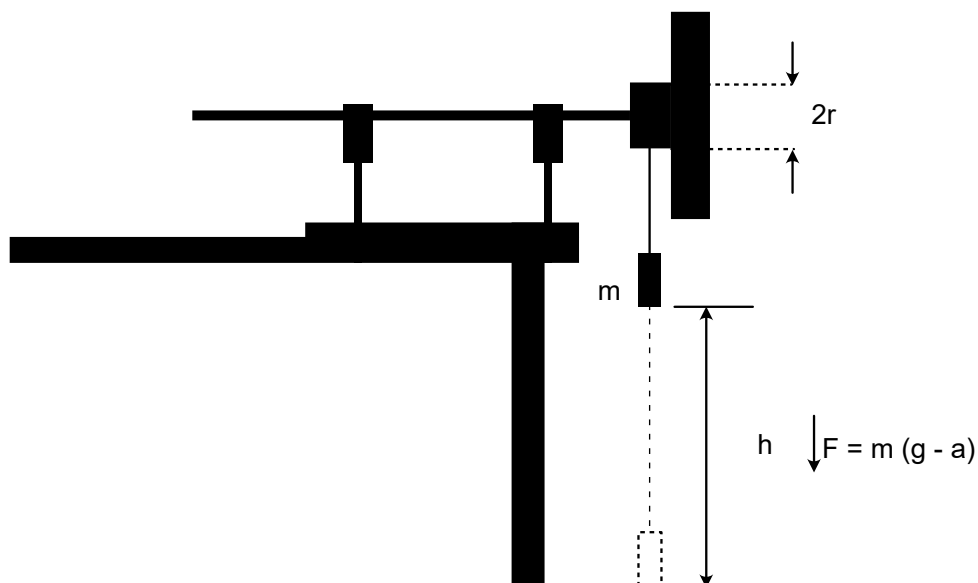
gdzie  $h$  - wysokość z jakiej spuszczaamy masę  $m$ ,  $t_F$  - czas spadku masy  $m$ ,  $r$  - promień szpuli, na którą nawinięta jest nić. Podstawiając wzory (9) i (10) do wzoru (4) otrzymujemy zależność:

$$t_F^2 = \frac{2I_p + 2mr^2}{m \cdot g r^2} \cdot h \quad (11)$$

Jest to wzór na liniową zależność  $t_F^2 = a \cdot h$ , gdzie  $a$  to współczynnik kierunkowy prostej. Dopasowując prostą do punktów pomiarowych oraz wyznaczając jej współczynnik kierunkowy możemy wyznaczyć moment bezwładności dysku  $I_p$ . Dodatkowo moment bezwładności dysku wyznaczony z jego geometrii  $I_{pg}$  wyraża się następującym wzorem:

$$I_{pg} = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{\pi}{2} \cdot R^4 \cdot d \cdot \rho \quad (12)$$

gdzie  $R$  - promień dysku,  $d$  - grubość dysku,  $\rho$  - gęstość materiału, z którego wykonany jest dysk (dla dysku w tym doświadczeniu  $\rho = 0,9 \text{ g/cm}^3$ ).



Rys. 1. Schemat ustawienia aparatury pomiarowej do wyznaczenia momentu bezwładności dysku żyroskopu.

Żyroskop to urządzenie składające się zazwyczaj z wirującego krążka (dysku) lub masy osadzonej w taki sposób, że jego oś obrotu może swobodnie zmieniać orientację w przestrzeni. Kluczową cechą żyroskopu jest jego zdolność do utrzymywania orientacji osi obrotu w przestrzeni dzięki zasadzie zachowania momentu pędu, pod warunkiem, że nie działają na niego zewnętrzne momenty sił. Żyroskop G (Rys. 2) zawieszony jest tak, aby mógł się obracać wokół 3 głównych osi, oraz tak aby był w równowadze w poziomie z przeciwwagą C. Jeśli wprawimy żyroskop w ruch obrotowy wokół osi x z prędkością kątową  $\omega$ , możemy zapisać następujące wyrażenia na moment pędu  $L$ , który jest stały w czasie i przestrzeni:

$$L = I_P \cdot \omega_R. \quad (13)$$

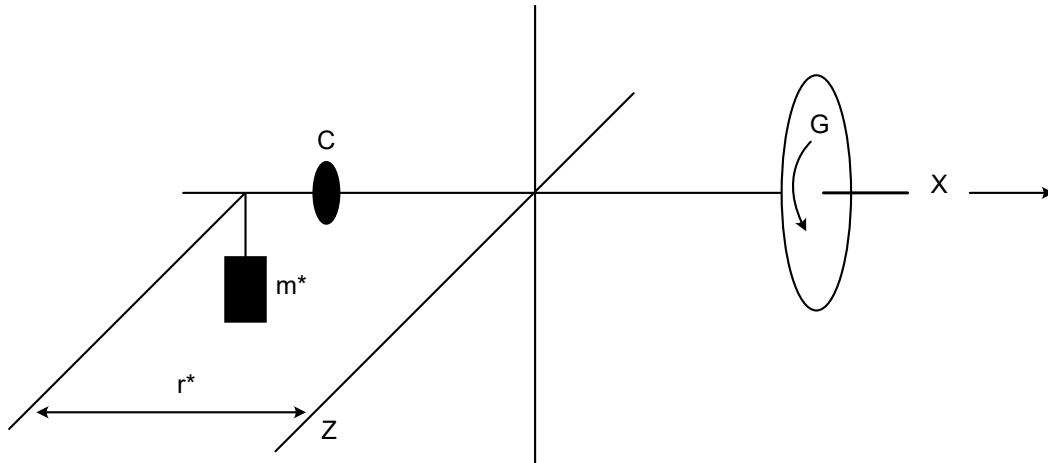
Zawieszając masę  $m^*$  w odległości  $r^*$  od punktu podparcia (Rys. 2) wywołujemy dodatkowy moment siły  $\vec{M}^*$ , który jest równy zmianie momentu pędu w czasie:

$$\vec{M}^* = \vec{r}^* \times m^* \vec{g} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (14)$$

W naszym przypadku wektor momentu siły  $\vec{M}^*$  jest prostopadły do wektora momentu pędu  $\vec{L}$ , co prowadzi do zmiany kierunku, ale nie wartości  $\vec{L}$ . Po czasie  $dt$  wektor  $\vec{L}$  obróci się o kąt  $d\phi$  względem swojej początkowej pozycji (Rys. 3). Zmiana wektora momentu pędu ma wówczas wartość:

$$dL = Ld\phi. \quad (15)$$

Należy podkreślić, że  $d\vec{L}$  jest prostopadłe do  $\vec{L}$ , co wynika z geometrii obrotu wektora w przestrzeni. Taka zmiana kierunku momentu pędu jest charakterystyczna dla zjawiska precesji.



Rys. 2. Schematyczny rysunek żyroskopu poddanego siłom

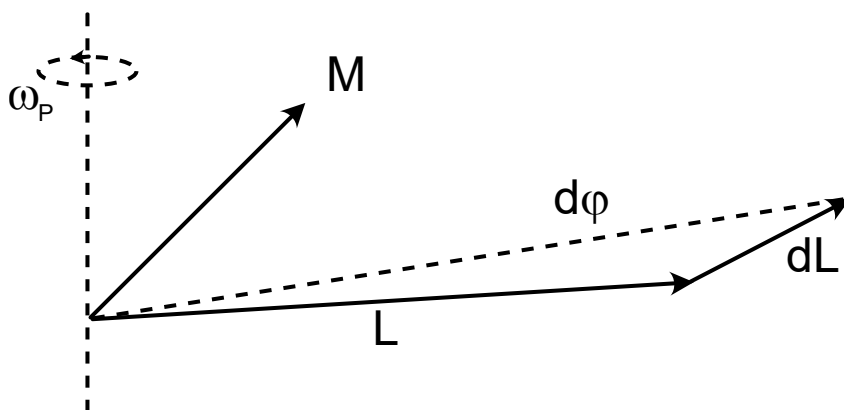
Żyroskop nie przewraca się pod wpływem dodatkowego momentu siły, a reaguje prostopadle do siły, która go wywołała. Oś  $x$  wokół, której obraca się dysk żyroskopu również zaczyna się obracać wokół osi pionowej. Ruch ten nazywamy precesją. Prędkość kątową precesji  $\omega_P$  możemy wyrazić następującym wzorem:

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{I_P \omega_R dt} = \frac{m^* g r^*}{I_P \omega_R} \quad (16)$$

Podstawiając  $\omega_P = \frac{2\pi}{t_P}$  oraz  $\omega_R = \frac{2\pi}{t_R}$  otrzymujemy:

$$\frac{1}{t_R} = \frac{m^* g r^*}{4\pi^2 I_P} \cdot t_P \quad (17)$$

Podwojenie momentu siły (podwojenie masy  $m$ ) spowoduje podwojenie częstotliwości precesji. Jeśli zawiesimy masę  $m^*$  z przodu osi żyroskopu, lub jeśli kierunek obrotu dysku zostanie zmieniony na przeciwny, kierunek precesji również zmieni się na przeciwny. Jeśli użyjemy dodatkowego dysku takiego samego jak dysk żyroskopu i wprawimy oba dyski w ruch obrotowy w przeciwnych kierunkach, precesja się nie pojawi pod wpływem dodatkowego momentu siły.



Rys. 3. Precesja poziomej osi żyroskopu. Dysk obraca się wokół osi, która zgodna jest z kierunkiem wektora  $\vec{L}$ , natomiast precesja następuje wokół osi prostopadłej do  $\vec{L}$ .

Oprócz precesji, oś wirującego żyroskopu może wykazywać również bardziej złożony ruch zwany nutacją. Nutacja objawia się jako niewielkie, okresowe wahania (drgania) osi obrotu żyroskopu w górę i w dół podczas

jej ruchu precesyjnego. Oznacza to, że koniec osi żyroskopu nie porusza się po idealnym okręgu w płaszczyźnie precesji, lecz zakreśla bardziej skomplikowaną krzywą, często przypominającą cykloidę. Nutacja jest zazwyczaj wynikiem początkowych warunków ruchu lub działania sił zakłócających. Może pojawić się, gdy oś żyroskopu nie jest początkowo idealnie pozioma lub gdy zostanie wytrącona z równowagi (np. przez lekkie pchnięcie osi). Częstość nutacji  $\omega_N$  jest zazwyczaj znacznie większa niż częstość precesji  $\omega_P$  i jest związana z częstością obrotu własnego żyroskopu  $\omega_R$ . Zależność częstości nutacji i częstości obrotowej wyraża się następująco:

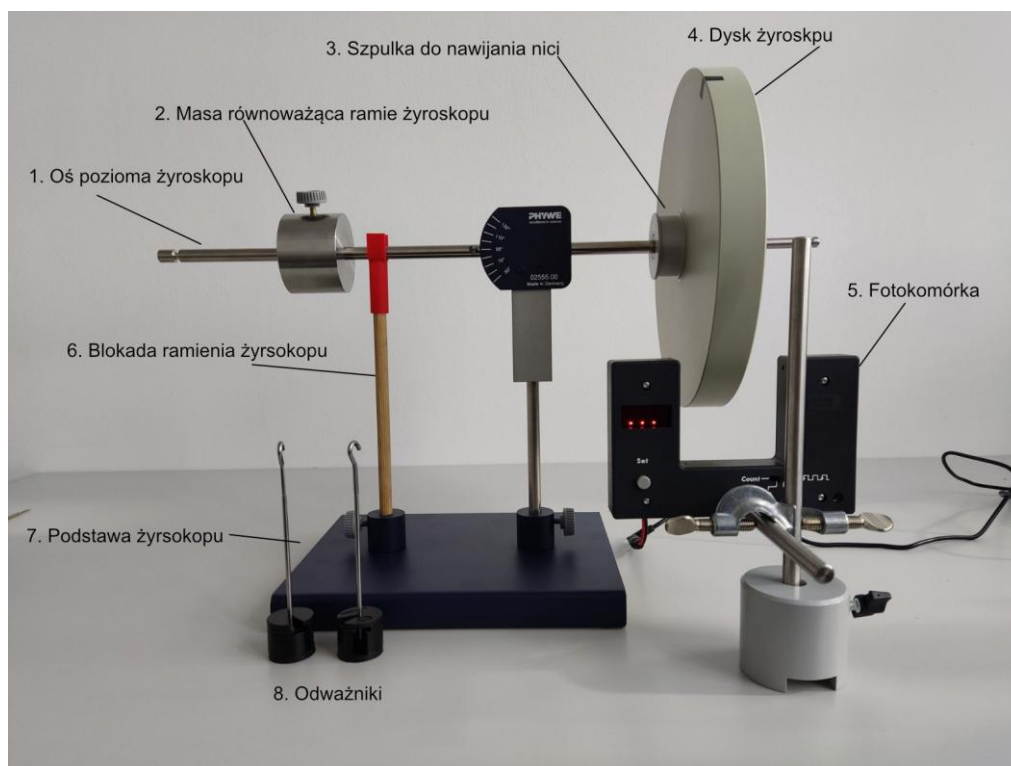
$$\omega_N = k\omega_R; t_R = kt_N, \quad (18)$$

gdzie  $k$  jest stałą zależną od momentu bezwładności względem głównych osi obrotu. W praktyce nutacja jest często tłumiona przez siły tarcia i oporu, przez co po pewnym czasie ruch osi żyroskopu staje się czystą precesją.



## METODOLOGIA WYKONANIA POMIARÓW

Zestaw żyroskopu 3-osiowego przedstawiono na Rys. 4 składa się on z: osi poziomej żyroskopu (1), masy równoważącej ramię żyroskopu (2), szpulki do nawijania nici (3), dysku żyroskopu (4), fotokomórki (5), blokady ramienia żyroskopu (6), podstawy żyroskopu (7), odważników (8).



Rys. 4. Żyroskop 3-osiowy.

## Wyznaczenie momentu bezwładności dysku żyroskopu

1. Zrównoważyć ramię żyroskopu (1) za pomocą masy (2).
2. Zmierzyć grubość  $d$  i średnicę  $2R$  dysku żyroskopu (4) oraz średnicę  $2r$  szpulki (3).
3. Ustawić żyroskop tak aby nić przywiązana do szpulki żyroskopu (3) wystawała poza krawędź stołu (Rys. 1).
4. Do pętli na drugim końcu nici przyczepić masę  $m = 60g$  - talerz z 5 obciążnikami szczelinowymi (8).
5. Zmierzyć czas opadania  $t_F$  masy  $m$  z kilku wysokości  $h$  wskazanych przez prowadzącego (należy wybrać co najmniej 5 wysokości – w części obliczeniowej trzeba wykreślić odpowiedni wykres  $t_F^2(h)$ ), w tym celu nawinąć nić na szpulę żyroskopu (3) tak aby masa  $m$  znajdowała się na zadanej wysokości  $h$ . WAŻNE: Oś żyroskopu (1) należy utrzymać w poziomie - można ją oprzeć na blokadzie ramienia (6).

## Pomiar czasu precesji i szybkości wirowania dysku

6. Żyroskop ustawić tak aby miał swobodę ruchu wokół jego 3 osi. (Usunąć blokadę ramienia (6) jeśli była używana).
7. Wprawić dysk żyroskopu w ruch obrotowy, w tym celu na szpulę (3) nawinąć nić i następnie mocno pociągnąć za jej koniec, utrzymując jednocześnie oś obrotu żyroskopu (1) w poziomie.
8. Zmierzyć czas jednego pełnego obrotu dysku żyroskopu (4)  $t_{R1}$  za pomocą fotokomórki (5).
9. Następnie usunąć fotokomórkę (5) i zawiesić masę  $m^* = 30 g$  w odległości  $r^* = 27 cm$  od punktu podparcia żyroskopu (specjalne wycięcie na osi żyroskopu), aby wywołać jego precesję.
10. Zmierzyć stoperem czas połowy precesji  $t_P/2$ .
11. Zdjąć ciężarek  $m_1$  aby oś żyroskopu odzyskała bezruch i ponownie używając fotokomórki (5) wyznaczyć czas obrotu dysku żyroskopu (4)  $t_{R2}$ . Czas  $t_{R2}$  danego pomiaru jest równocześnie czasem  $t_{R1}$  pomiaru następnego – przepisać ten wynik do tabeli pomiarowej w odpowiednie miejsce.
12. Ponownie zawiesić/zdjąć tą samą masę  $m_1$  i powtórzyć punkty (9 – 11) dla ciągle malejącej liczby obrotów dysku żyroskopu. Zdejmować/zawieszać masę  $m_1$  10 razy. **Nie rozpędzać żyroskopu za każdym razem od nowa.**



## Tabela pomiarowa

Masa:  $m^* = 30 \text{ g}$ , odległość:  $r^* = 27 \text{ cm}$

$2R$ [cm]	$d$ [cm]	$2r$ [cm]	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$t_F$ [s]	$h$ [cm]	$t_{R1}$ [s]	$t_{R2}$ [s]	$t_{RSR}$ [s]	$t_P/2$ [s]	$I_{p1} \pm u(I_{p1})$ [kg · m <sup>2</sup> ]	$I_{pg} \pm u(I_{pg})$ [kg · m <sup>2</sup> ]	
			0,9									
											$I_{p2} \pm u(I_{p2})$ [kg · m <sup>2</sup> ]	$\omega_P \pm u(\omega_P)$ [rad/s]



## Obliczenia

- Obliczyć moment bezwładności  $I_{pg}$  żyroskopu na podstawie wymiarów geometrycznych, korzystając ze wzoru  $I_{pg} = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{\pi}{2} \cdot R^4 \cdot d \cdot \rho$ . Niepewność momentu bezwładności  $u(I_{pg})$  wyznaczyć z metody przenoszenia niepewności.
- Wyznaczyć moment bezwładności dysku żyroskopu  $I_p$  na podstawie wykresu. W tym celu sporządzić wykres zależności  $t_F^2(h)$  (**WYKRES 1**).
- Do danych pomiarowych dopasować metodą najmniejszych kwadratów linię prostą. Na podstawie współczynnika nachylenia dopasowanej prostej i korzystając ze wzoru  $t_F^2 = \frac{2I_{p1} + 2mr^2}{mgr^2} \cdot h$  wyznaczyć moment bezwładności  $I_{p1}$  dysku żyroskopu.
- Wyznaczyć niepewność  $u(I_{p1})$  z prawa przenoszenia niepewności.
- Sporządzić wykres odwrotności wartości czasu obrotu  $t_{RSR}$  obliczonej jako średnia arytmetyczna obu pomiarów ( $t_{R1}$  i  $t_{R2}$ ) od czasu precesji  $t_P$  (**WYKRES 2**).
- Korzystając z metody najmniejszych kwadratów dopasować prostą i na podstawie jej współczynnika kierunkowego oraz wzoru  $\frac{1}{t_{RSR}} = \frac{m^*gr^*}{4\pi^2} \frac{1}{I_{p2}} \cdot t_P$  wyznaczyć moment bezwładności żyroskopu  $I_{p2}$ .
- Wyznaczyć niepewność  $u(I_{p2})$  z prawa przenoszenia niepewności.

8. Wyznaczyć częstość precesji  $\omega_p = \frac{m^*gr^*}{I_{p2}\omega_R}$ .
9. Wyznaczyć niepewność  $u(\omega_p)$  z prawa przenoszenia niepewności.
10. Porównać otrzymany wynik  $I_{p1}$  oraz  $I_{p2}$  z wartością momentu bezwładności  $I_{pg}$  wyznaczoną na podstawie wymiarów geometrycznych żyroskopu.