Wyznaczanie indukcyjności cewki i pojemności kondensatora w obwodzie prądu zmiennego

Wymagania do ćwiczenia

1 Prąd sinusoidalnie zmienny, wielkości charakterystyczne – wartość średnia, skuteczna i szczytowa.
2 Elementy R, L, C w obwodzie prądu zmiennego. Pojęcie reaktancji.
3 Obwód szeregowy R L C. Pojęcie impedancji.

Literatura

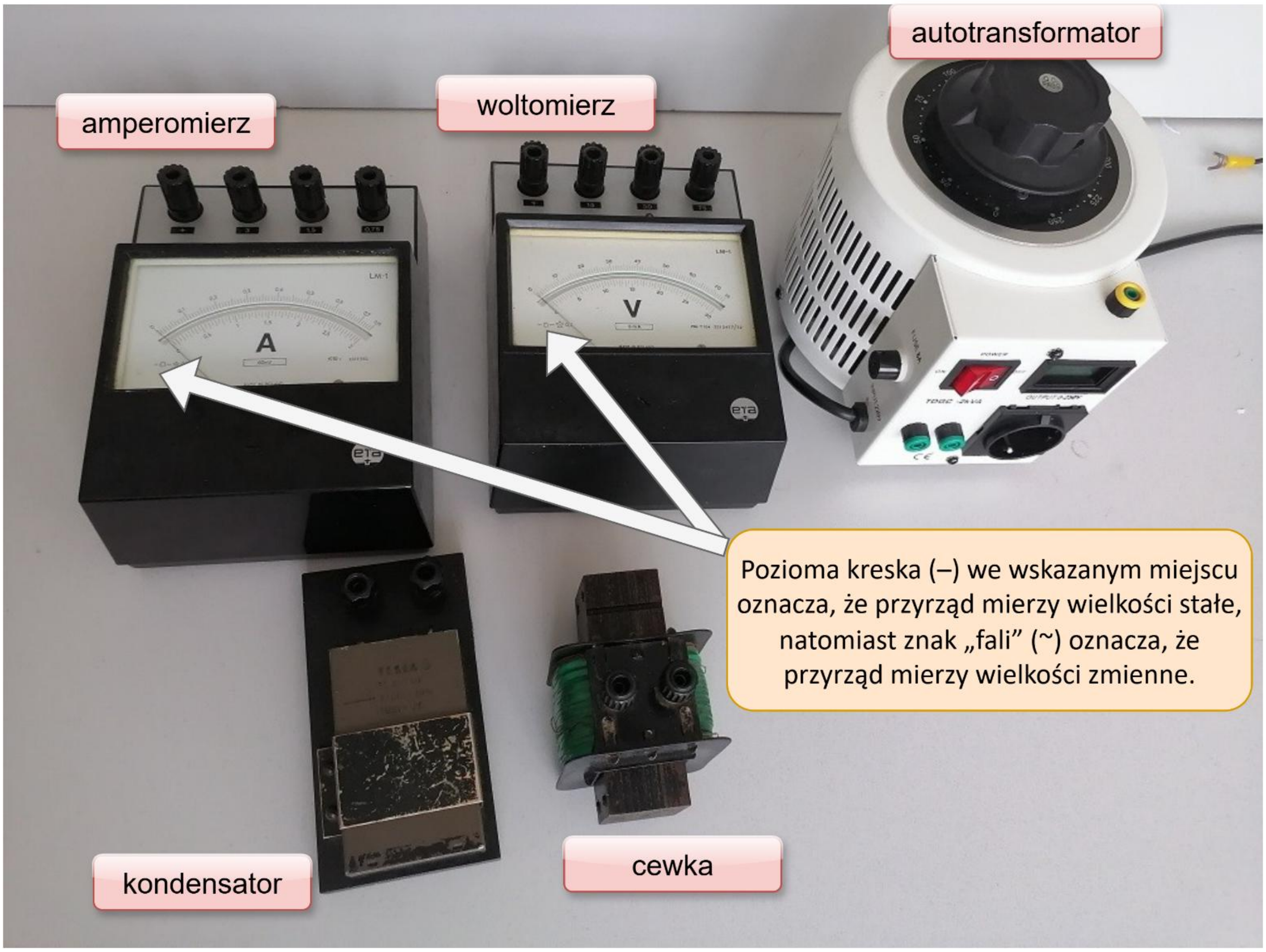
1 J. Massalski, M. Massalska - Fizyka dla inżynierów, t.l, WNT, Warszawa 2005, str. 453-458.
2 OpenStax, Fizyka dla szkół wyższych. Tom 2, Rozdział 15: Obwody prądu zmiennego.

Przykładowe pytania

1. Jak definiujemy wartość średnią, skuteczną i szczytową?
2. W jakich elementach występuje przesunięcie fazowe między prądem a napięciem?
3. Czym jest reaktancja indukcyjna i pojemnościowa?
4. Co wpływa na zmianę reaktancji?
5. Jak zmienia się reaktancja cewki w miarę wzrostu częstotliwości napięcia?
6. Jak zmienia się reaktancja kondensatora w miarę wzrostu częstotliwości napięcia?
7. Czy idealny rezystor ma reaktancję?
8. Czym jest impedancja?
9. Czy częstotliwość napięcia jest konieczna do wyznaczenia impedancji elementów L i C?
10. Jakie wielkości są potrzebne do obliczenia impedancji obwodu RLC?

Przyrządy pomiarowe

Amperomierz, woltomierz,



WPROWADZENIE DO PROBLEMATYKI ĆWICZENIA

Wielkości charakteryzujące prąd przemienny

W obwodzie zewnętrznym, do którego jest przyłożone napięcie:

$$U = U_{max} sin\omega t \tag{1}$$

płynie prąd sinusoidalny o natężeniu:

$$I = I_{max} sin(\omega t + \varphi_0) \tag{2}$$

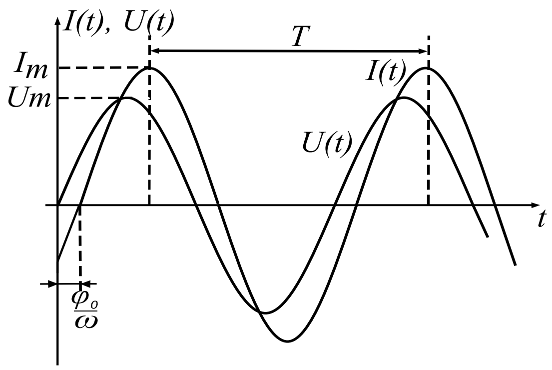
Gdzie:

U_{max}, I_{max} − wartości szczytowe (maksymalne, amplitudy) napięcia i natężenia prądu,

ω − częstość (pulsacja) $\omega = 2\pi f$; gdzie f − częstotliwość,

φ_0 − przesunięcie fazowe pomiędzy napięciem a natężeniem prądu.

Podstawowe wielkości charakteryzujące prąd przemienny przedstawiono na Rys. 1.



Rys. 1 Graficzne przedstawienie wartości chwilowej, szczytowej, przesunięcia fazowego, okresu napięcia i prądu

Prąd przemienny charakteryzują również takie wielkości jak wartość średnia natężenia prądu oraz wartość skuteczna.

Wartość średnia natężenia prądu przemiennego równa się zeru:

$$\frac{1}{T}\int_0^T I\,(t)dt = 0 \tag{3}$$

gdzie: T – okres zmian natężenia prądu.

Ponieważ wartość średnia prądu przemiennego w ciągu całego okresu jest równa zero, dlatego podaje się wartość średnią w czasie $T/2$. Wartość tę można policzyć ze wzoru:

$$I_{śr} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I(t)dt \tag{4}$$

Wartość średnia połokresowa prądu przemiennego jest równa liczbowo takiej wartości prądu stałego, który w tym samym czasie (połowie okresu) przeniesie taki sam ładunek, co dany prąd przemienny.

Wartością skuteczną prądu przemiennego określa wzór:

$$I_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T} I^2(t)dt} \tag{5}$$

Dla przebiegu sinusoidalnego:

$$I_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T} I_{max}^2 \, sin^2(\omega t + \varphi_0)} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \tag{6}$$

Wartość skuteczna natężenia prądu jest to wartość liczbowo równa takiej wartości prądu stałego, który w tym samym czasie i na tym samym oporze wydzieli taką samą ilość ciepła.

Rozpatrując obwody prądu elektrycznego, możemy wyróżnić następujące elementy: odbiorniki o oporności czynnej i oporniki o oporności biernej. Do pierwszej grupy zaliczamy rezystory, do drugiej zaś cewki (zwojnice) i kondensatory.

Rezystor w obwodzie prądu zmiennego

Rozpatrzmy odbiornik o oporności czynnej R przyłączony do zacisków źródła prądu zmiennego. Przyjmiemy, że zdolność wytwarzania pola magnetycznego w rozpatrywanym odbiorniku, a więc wpływ indukcyjności L, możemy pominąć; poza tym w poszczególnych częściach rozpatrywanego odbiornika nie gromadzą się ładunki elektryczne, a więc pojemność C odbiornika jest znikomo mała:

$$R > 0, \qquad L = 0, \qquad C = 0$$

Natężenie prądu przepływające przez odbiornik jest równe:

$$I = I_{max} sin\omega t \tag{7}$$

Zgodnie z prawem Ohma spadek napięcia U na oporności czynnej R przy niezmienionej jej wartości jest tym większy, im większa jest wartość przepływającego prądu, więc chwilowe napięcie jest największe (U_{max}) w chwili, gdy wartość przepływającego prądu jest szczytowa (I_{max}) Gdy prąd $I = 0$, to napięcie $U = 0$. Napięcie na rezystancji i prąd są zgodne w fazie, osiągają w tych samych chwilach swe wartości szczytowe dodatnie i ujemne oraz zerowe.

Między prądem i napięciem chwilowym zachodzi następujący związek (prawo Ohma):

$$U = RI = RI_{max} sin\omega t \tag{8}$$

co pociąga analogiczny związek między wartościami szczytowymi i skutecznymi:

$$U_{max} = RI_{max} \qquad \Longrightarrow \qquad U_{sk} = RI_{sk} \tag{9}$$

Widać, że między napięciem i natężeniem prądu zależność jest liniowa:

$$U = RI \qquad \text{czyli} \qquad y = ax \tag{10}$$

Kondensator w obwodzie prądu zmiennego

Napięcie doprowadzone ze źródła prądu zmiennego do okładek kondensatora zmienia się zgodnie z równaniem (1). Prąd płynący przez kondensator związany jest z przemieszczeniem ładunku q, dlatego możemy napisać:

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{11}$$

Korzystając z definicji pojemności wyliczymy ładunek:

$$q = CU = CU_{max} sin\omega t \tag{12}$$

Skąd, podstawiając do (11), wyliczymy natężenie prądu:

$$I = C\omega U_{max} cos\omega t \tag{13}$$

Ponieważ:

$$cos\alpha = sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

otrzymujemy:

$$I = C\omega U_{max} sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{14}$$

Równanie to wskazuje, że przepływający przez kondensator prąd zmienny ma natężenie o przebiegu sinusoidalnym, które wyprzedza napięcie o kąt 90°. Szczytowa wartość natężenia prądu wynosi:

$$I_{max} = C\omega U_{max}$$

a dla wartości skutecznych

$$I_{sk} = C\omega U_{sk} \tag{15}$$

Kondensator przewodzi prąd zmienny. Stanowi on dla prądu zmiennego pewną oporność, której wartość wyraża się stosunkiem wartości skutecznych napięcia U_{sk} do prądu I_{sk}. Oporność tę nazywa się opornością bierną pojemnościową (reaktancją pojemnościową) i oznacza X_C:

$$X_c = \frac{U_{sk}}{I_{sk}} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \tag{16}$$

Między napięciem i natężeniem prądu zależność jest liniowa: $$U = X_c I \qquad \text{czyli} \qquad y = ax \tag{17}$$

Indukcyjność w obwodzie prądu zmiennego

Jeżeli do źródła prądu stałego o napięciu *U* podłączymy cewkę o wielu zwojach z przewodnika o znikomo małej oporności ($R \approx 0$), to przez taką zwojnicę płynąłby prąd o bardzo dużym natężeniu ograniczonym tylko opornością wewnętrzną źródła.

Jeżeli tę samą cewkę pozbawioną oporności czynnej R przyłączymy do źródła prądu zmiennego, to okaże się, że natężenie tego prądu będzie ograniczone. Prąd w obwodzie ogranicza siła elektromotoryczna indukcji własnej E_{ind}, której wartość jest zależna od szybkości zmian strumienia magnetycznego Φ_B przenikającego cewkę, a więc od szybkości zmian prądu przepływającego przez uzwojenie cewki i od współczynnika indukcyjności własnej L zwojnicy:

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{18}$$

Rozpatrzmy przypadek, w którym przez odbiornik (cewkę):

$$L > 0, \qquad R = 0, \qquad C = 0$$

przepływa prąd zmienny. Wartości chwilowe tego prądu wyraża równanie:

$$I = I_{max} sin\omega t \tag{19}$$

Spadek napięcia U_L na indukcyjności wynika z siły elektromotorycznej indukcji własnej. Można to zapisać następująco:

$$U_L = -E_{ind}$$

Podstawiając za E_{ind} zależność (18) definiującą siłę elektromotoryczną indukcji oraz różniczkując wyrażenie (19) na wartość chwilową prądu otrzymamy:

$$U_L = -E_{ind} = L\frac{dI}{dt} = L\omega I_{max} cos\omega t = L\omega I_{max} sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{20}$$

Z powyższego równania wynika, że natężenie prądu jest opóźnione o kąt 90° względem napięcia doprowadzonego do zacisków „idealnej" cewki.

Bezwzględna wartość szczytowa napięcia na indukcyjności wynika z zależności (20):

$$U_{max} = E_{max} = L\omega I_{max},$$

a wartość skuteczna:

$$U_{sk} = E_{sk} = L\omega I_{sk} \tag{21}$$

Z powyższego wzoru wyrażającego zależność między wielkościami skutecznymi U, I i częstością ω prądu przepływającego oraz indukcyjnością L cewki określamy tzw. oporność bierną indukcyjną (reaktancję indukcyjną) X_L:

$$X_L = \frac{U_{sk}}{I_{sk}} = \omega L = 2\pi f L \tag{22}$$

Jeśli uwzględnimy opór czynny R cewki, to według II prawa Kirchhoffa suma sił elektromotorycznych w obwodzie będzie równa spadkowi napięcia U_R na oporze czynnym cewki R:

$$\varepsilon + E_{ind} = U_R \qquad \text{czyli} \qquad \varepsilon - L\frac{dI}{dt} = RI \tag{23}$$

gdzie ε jest siłą elektromotoryczną źródła. Przewidując rozwiązanie powyższego równania w postaci:

$$I = I_{max} sin(\omega t + \varphi_0) \tag{24}$$

oraz po wstawieniu sinusoidalnego przebiegu siły elektromotorycznej źródła, $\varepsilon = U_{max} sin\omega t$, do równania (23) otrzymamy:

$$U_{max} sin\omega t - LI_{max}\omega cos(\omega t + \varphi_0) = RI_{max} sin(\omega t + \varphi_0) \tag{25}$$

Wykorzystując wzory na kosinus i sinus sumy kątów, powyższe równanie można przekształcić do postaci:

$$U_{max} sin\omega t - LI_{max}\omega\big(cos(\omega t)cos(\varphi_0) - sin(\omega t)sin(\varphi_0)\big) = RI_{max}\big(sin(\omega t)cos(\varphi_0) + cos(\omega t)sin(\varphi_0)\big)$$

Zgrupujmy wyrazy zawierające $sin\omega t$ i $cos\omega t$ i otrzymując tożsamość:

$$sin\omega t(U_{max} + LI_{max}\omega sin\varphi_0 - RI_{max} cos\varphi_0) \; - \; cos\omega t(RI_{max} sin\varphi_0 + LI_{max}\omega cos\varphi_0) = 0$$

która musi być spełniona dla dowolnej chwili t. Wymaga to zerowania się współczynników znajdujących się przy $sin\omega t$ i $cos\omega t$. Otrzymamy równania:

$$\begin{gathered} RI_{max} sin\varphi_0 + LI_{max}\omega cos\varphi_0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad tg\varphi_0 = -\frac{L\omega}{R} \\ U_{max} + LI_{max}\omega sin\varphi_0 - RI_{max} cos\varphi_0 = 0 \end{gathered} \tag{26}$$

Maksymalną wartość natężenia prądu znajdziemy z drugiego równania powyższego układu, po wykorzystaniu związków:

$$cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{tg^2\varphi + 1}}, \qquad sin\varphi = tg\varphi cos\varphi$$

Jest ona równa:

$$I_{max} = \frac{U_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \equiv \frac{U_{max}}{Z} \tag{27}$$

gdzie

$$Z \equiv \frac{U_{max}}{I_{max}} = \frac{U_{sk}}{I_{sk}} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \tag{28}$$

jest opornością bierną (impedancją) obwodu. Znając wartości impedancji Z i oporności czynnej R możemy wyznaczyć indukcyjność cewki:

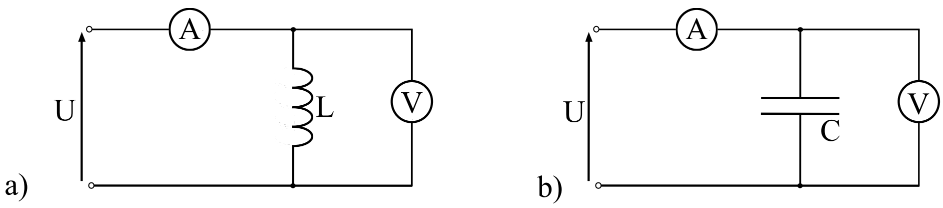
$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} \tag{29}$$

Z równania (27) wynika, że między napięciem i natężeniem prądu cewki zależność jest liniowa:

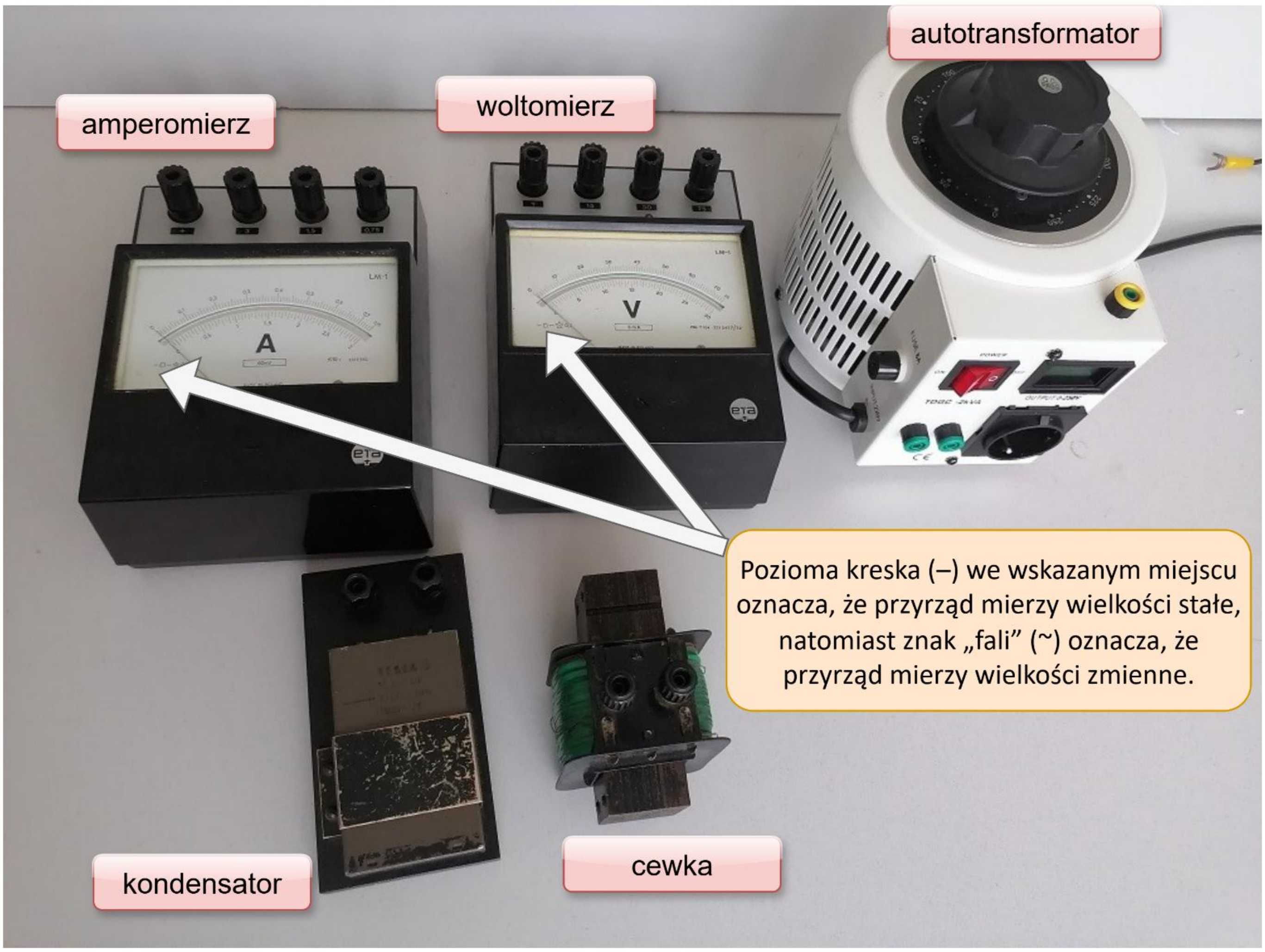
$$U = ZI \qquad \text{czyli} \qquad y = ax \tag{30}$$

Metodologia wykonania ćwiczenia.

Układy pomiarowe do wyznaczania indukcyjności cewki i pojemności kondensatora przedstawione zostały na Rys. 2.



Rys. 2 Układy pomiarowe: a) dla cewki, b) dla kondensatora.



1. Zmontować obwód pomiarowy dla cewki do pomiarów przy prądzie stałym. Przy łączeniu obwodu zwróć uwagę, aby zastosować mierniki przeznaczone dla prądu stałego.
2. Zasilając obwód pomiarowy dla cewki prądem stałym odczytać wartości prądu dla różnych wartości napięcia (max 12 V, co 1 V).

Tabela pomiarowa dla cewki zasilanej prądem stałym.

Wielkości mierzone		Wielkości obliczane			
U_{-} [V]	I_{-} [A]	$u(U_{-})$ [V]	$u(I_{-})$ [A]	R [Ω]	$R \pm u(R)$ [Ω]

3. Zmontować obwód pomiarowy dla cewki do pomiarów przy prądzie przemiennym. Przy łączeniu obwodu zwrócić uwagę, aby zastosować mierniki przeznaczone dla prądu przemiennego. Mierniki prądu stałego zasilone prądem przemiennym ulegną uszkodzeniu!
4. Zasilając obwód pomiarowy prądem przemiennym odczytać wartości prądu dla różnych wartości napięcia (max 75 V, co 5 V). **Uwaga: Niebezpieczne napięcie – nie dotykać przewodów!**

Tabela pomiarowa dla cewki zasilanej prądem zmiennym.

Wielkości mierzone		Wielkości obliczane				
$U_{\sim}$ [V]	$I_{\sim}$ [A]	$u(U_{\sim})$ [V]	$u(I_{\sim})$ [A]	Z [Ω]	$Z \pm u(Z)$ [Ω]	$L \pm u(L)$ [mH]

5. Pomiarów dla kondensatora przy prądzie stałym nie wykonuje się.
6. Zmontować obwód pomiarowy dla kondensatora do pomiarów przy prądzie przemiennym. Przy łączeniu obwodu zwrócić uwagę, aby zastosować mierniki przeznaczone dla prądu przemiennego. Mierniki prądu stałego zasilone prądem przemiennym ulegną uszkodzeniu!
7. Zasilając obwód dla kondensatora prądem przemiennym odczytać wartości prądu dla różnych wartości napięcia (max 100 V, co 10 V). **Uwaga: Niebezpieczne napięcie – nie dotykać przewodów!**
8. Zanotować wartość częstotliwości prądu zmiennego.

Tabela dla kondensatora zasilanego prądem zmiennym.

Wielkości mierzone		Wielkości obliczane				
$U_\sim$ [V]	$I_\sim$ [A]	$u(U_\sim)$ [V]	$u(I_\sim)$ [A]	X_C [Ω]	$X_C \pm u(X_C)$ [Ω]	$C \pm u(C)$ [μF]

Obliczenia

1. Sporządzić wykres zależności $U\_(I\_)$ dla obwodu z cewką zasilanego prądem stałym. Na wykresie zaznaczyć niepewności $u(U\_)$ i $u(I\_)$.
2. Metodą najmniejszych kwadratów dopasować prostą do punktów pomiarowych $U\_(I\_)$. Bazując na równaniach (10) obliczyć rezystancję R cewki oraz jej niepewność $u(R)$.
3. Sporządzić wykres zależności $U_\sim(I_\sim)$ dla obwodu z cewką zasilanego prądem przemiennym. Na wykresie zaznaczyć niepewności $u(U_\sim)$ oraz $u(I_\sim)$.
4. Z oraz $u(Z)$ cewki wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów dla punktów pomiarowych $U_\sim(I_\sim)$, bazując na równaniach (30), podobnie jak w punkcie 2 obliczeń.
5. Obliczyć indukcyjność cewki z zależności (29). Niepewność $u(L)$ policzyć jako niepewność złożoną:

$$u(L) = \sqrt{\left[\frac{\partial L}{\partial R}u(R)\right]^2 + \left[\frac{\partial L}{\partial Z}u(Z)\right]^2}$$

podając jawne wyrażenia na pochodne.

6. Sporządzić wykres zależności $U_{\sim}(I_{\sim})$ dla obwodu z kondensatorem. Na wykresie zaznaczyć niepewności $u(U_{\sim})$ oraz $u(I_{\sim})$. Wyznaczyć X_C oraz $u(X_C)$ metodą najmniejszych kwadratów dla punktów pomiarowych $U_{\sim}(I_{\sim})$ kondensatora, bazując na równaniach (17).
7. Obliczyć wartość pojemności kondensatora C ze wzoru (16). Niepewność $u(C)$ wyliczyć metodą przenoszenia niepewności:

$$u(C) = \left|\frac{\partial C}{\partial X_C}\right| u(X_C)$$

podając jawne wyrażenie na pochodną.
8. We wnioskach na początku zapisać poprawnie zaokrąglone główne wyniki obliczeń razem z niepewnościami.